CONCOURS GÉNÉRAL

SESSION DE 1998

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.
Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice I

Un tétraèdre $ABCD$ vérifie les conditions suivantes :
(a) les arêtes AB, AC et AD sont deux à deux orthogonales ;
(b) $AB = 3$ et $CD = \sqrt{2}$.
Déterminer la valeur minimale de $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

Exercice II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout entier naturel n, la relation :

$$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n .$$

Montrer qu'il existe un entier p non nul tel que la relation $u_n = u_{n+p}$ ait lieu pour tout entier naturel n.

Exercice III

Pour tout réel x on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Soit k un entier fixé, supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définie par :

$$f(n) = n + E\left(\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}}\right).$$

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction f.

Exercice IV

On considère deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, et un point M n'appartenant à aucune de ces deux droites. On considère deux points variables, A sur D_1 et B sur D_2, tels que le point M appartienne au segment $[A\,B]$.

(Les questions 1 et 2 sont indépendantes)

1) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle l'aire du triangle $O\,A\,B$ est minimale. Construire les points A et B ainsi déterminés.

2) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle le périmètre du triangle $O\,A\,B$ est minimal et qu'on a alors l'égalité des périmètres des triangles $O\,A\,M$ et $O\,B\,M$, ainsi que la relation : $\dfrac{A\,M}{\tan\dfrac{\widehat{OAM}}{2}} = \dfrac{B\,M}{\tan\dfrac{\widehat{OBM}}{2}}$. Construire les points A et B ainsi déterminés.

Exercice V

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère un ensemble A de n points du plan, cet ensemble ne contenant pas trois points alignés.

Montrer qu'il existe un ensemble S de $2n-5$ points du plan tel que pour tout triangle dont les sommets sont des points de A il existe au moins un point de S qui lui soit strictement intérieur.